

Waldemar WÓJCIK  
Piotr KISAŁA  
Krzysztof KRÓL

# WYZNACZANIE NAPRĘŻEŃ METODĄ ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH ORAZ METODĄ ELEMENTÓW BRZEGOWYCH

**STRESZCZENIE**      *W niniejszej pracy przedstawiono zastosowanie analizy odwrotnej do wyznaczania rozkładu wydłużenia. W tym celu wykorzystany został czujnik ze światłowodową siatką Bragga (ang. fiber bragg grating – FBG). Omówiono sposób rozwiązania zadania wprost. Symulacje komputerowe przeprowadzone zostały przy zastosowaniu algorytmów numerycznych realizujących obliczenia zgodnie z matematyczną strukturą modelu i uwzględniających wartości wszystkich pozostałych elementów czujnika FBG. Dokonano również badania doświadczalne przy wykorzystaniu zbudowanego stanowiska pomiarowego.*

**Słowa kluczowe:** *metoda elementów brzegowych, metoda elementów skończonych, światłowodowe siatki Bragga, rozkład wydłużenia.*

## 1. WSTĘP

---

Zadanie odwrotne polega na ilościowym wyznaczeniu przyczyn, gdy znane są skutki i struktura modelu obiektu. Większe znaczenie niż rozwiązywanie zadania wprost ma proces odwrotny, czyli wnioskowanie o przyczynach na

---

**prof. dr hab. inż. Waldemar WÓJCIK**  
e-mail: Waldemar.wojcik@pollub.pl

**dr inż. Piotr KISAŁA, mgr inż. Krzysztof KRÓL**  
e-mail: p.kisala@pollub.pl, k.krol@pollub.pl

Politechnika Lubelska, Katedra Elektroniki

PRACE INSTYTUTU ELEKTROTECHNIKI, zeszyt 249, 2011

podstawie skutków. Proces ten zwany zadaniem odwrotnym (ang. inverse problem) może przyjmować mniej lub bardziej formalną formę [1]. Dlatego ten termin obejmuje w metrologii dwa różne zagadnienia: rekonstrukcję sygnałów i estymację parametrów [12]. W niniejszej pracy problem odwrotny wykorzystano w celu estymacji parametrów modelu czujnika rozkładu wydłużenia. Badany czujnik wykorzystuje światłowodową siatkę Bragga [15]. Podczas wykonywanych pomiarów rozkładu wydłużenia, duże znaczenie ma model matematyczny. Bezpośrednie pomiary opisanej wielkości nie są możliwe z powodu braku odpowiednich elementów systemu pomiarowego (zwłaszcza czujników), dlatego przedstawione pomiary należą do pośrednich. W tym przypadku nieodzownym jest zastosowanie nowoczesnej aparatury optoelektronicznej, która za pośrednictwem wyspecjalizowanych czujników rejestruje dostępne sygnały fizyczne, przetwarza je na postać cyfrową, a następnie, zgodnie z zaimplementowanymi algorytmami numerycznymi, przelicza na wartości poszukiwanych wielkości.

Wykonane pomiary polegają zatem na wykorzystaniu zależności pomiędzy wielkościami, które bezpośrednio nie można zmierzyć, dokonaniu pomiaru wielkości dostępnych i obliczeniu wartości wielkości analizowanych. Obliczenia wykonywane są zgodnie z modelem matematycznym, tj. związkiem między wielkościami mierzonymi bezpośrednio  $y = [y_1, y_2, \dots, y_n]$  a wielkością poszukiwaną  $\theta$ . Model ten przyjmuje następującą postać [13]:

$$\theta = h_m(y) \tag{1}$$

W omawianym przypadku występuje sytuacja, że wynikiem obliczeń nie jest jedna liczba, lecz więcej wartości tzn. rozwiązanie jest niejednoznaczne. W takim przypadku stosowane są odpowiednio opracowane algorytmy numeryczne, pozwalające na uzyskanie rozwiązania jednoznacznie, omówione w dalszej części artykułu.

## 2. POMIARY I BADANIA

---

Rozkład wydłużenia próbki materiału może być wyznaczony na podstawie rozkładu względnych zmian rozmiarów liniowych w obszarze badanym. Podjęte badania, prowadzą do wykorzystania informacji z widma zmierzonego i modelowego, przetworzonej na wydłużenie rzeczywiste – tzw. problem odwrotny. Aby można było przeprowadzić badania laboratoryjne zaprojektowano i wykonano przyrząd do rozciągania próbek metalowych. Na próbkach naklejone zostały siatki Bragga. Wydłużenia próbki, przenosząc się na siatkę, powodują zmiany

długości jej okresów, co zmienia również jej charakterystykę spektralną, możliwą do wyznaczenia przy użyciu fotospektrometru. Charakterystyka spektralna siatki umożliwia uzyskanie danych o rozkładzie wydłużenia nawet wielokrotnie różnicowanego na długości pomiarowej.

W celu uzyskania zakładanych rozkładów wydłużeń w obszarze badanym, zastosowano próbki o różnych, znanych kształtach. Znając przekrój próbki i obciążenia w kilku punktach wyliczono wydłużenia, które powodują również wydłużenie siatki Bragga. Do obliczeń wykorzystano metodę elementów skończonych – MES [3], oraz metodę elementów brzegowych – MEB [19, 20]. Siatka MES ułożona została w taki sposób, aby największe jej zagęszczenie występowało w miejscach przewężeń próbek. Natomiast w MEB zostały policzone wartości na brzegu zewnętrznym i wewnętrznym w miejscach przewężeń.

Analiza za pomocą metody elementów skończonych oraz metodą elementów brzegowych pozwoliła na teoretyczne wyliczenie wartości wydłużenia siatki Bragga dla badanych próbek. Teoretyczny rozkład wydłużenia (obliczony za pomocą MES) został w dalszej części pracy przedstawiony na wspólnych wykresach – razem z rozkładem wyznaczonym za pomocą zadania odwrotnego, natomiast obliczony za pomocą MEB na osobnym wykresie (rys. 5).

Metoda elementów brzegowych (MEB, ang. Boundary Element Method – BEM) jest numeryczną metodą rozwiązywania równań całkowo-brzegowych, tj. równań, w których poszukiwana funkcja znajduje się pod znakiem całki obliczanej po brzegu pewnego obszaru. Możliwe jest także rozwiązanie równań różniczkowych, które zastępuje się odpowiednio skonstruowanymi równaniami całkowymi [19, 20]. Ideą tej metody jest przekształcenie danego zagadnienia brzegowego do równoważnego równania całkowego, które jest określone na brzegu badanego obszaru. Zagadnienie brzegowe opisane jest układem równań różniczkowych z odpowiednimi warunkami początkowymi i brzegowymi oraz rozwiązaniem fundamentalnym. Przeniesienie obliczeń na brzeg obszaru prowadzi do obniżenia przestrzeni o jedność (brzeg obszarów trójwymiarowych jest powierzchnią a brzeg obszarów dwuwymiarowych krzywą).

Brzeg tarczy oznaczono przez  $\Gamma$ , a obszar zajmowany przez płytkę jako  $\Omega$  płytka jest obciążona statycznie na brzegu zewnętrznym  $\Gamma$  siłami powierzchniowymi  $t_j$ , a obszar tarczy – siłami objętościowymi  $f_j$ . Związek między obciążeniem tarczy, a przemieszczeniami  $u_j$  określa tożsamość Somigliany [22]

$$c_{ij}(x')u_j(x') + \int_{\Gamma} T_{ij}(x', x)u_j(x)d\Gamma(x) = \int_{\Gamma} U_{ij}(x', x)t_j(x)d\Gamma(x) + \int_{\Omega} U_{ij}(x', X)f_j(X)d\Omega(X) \quad (2)$$

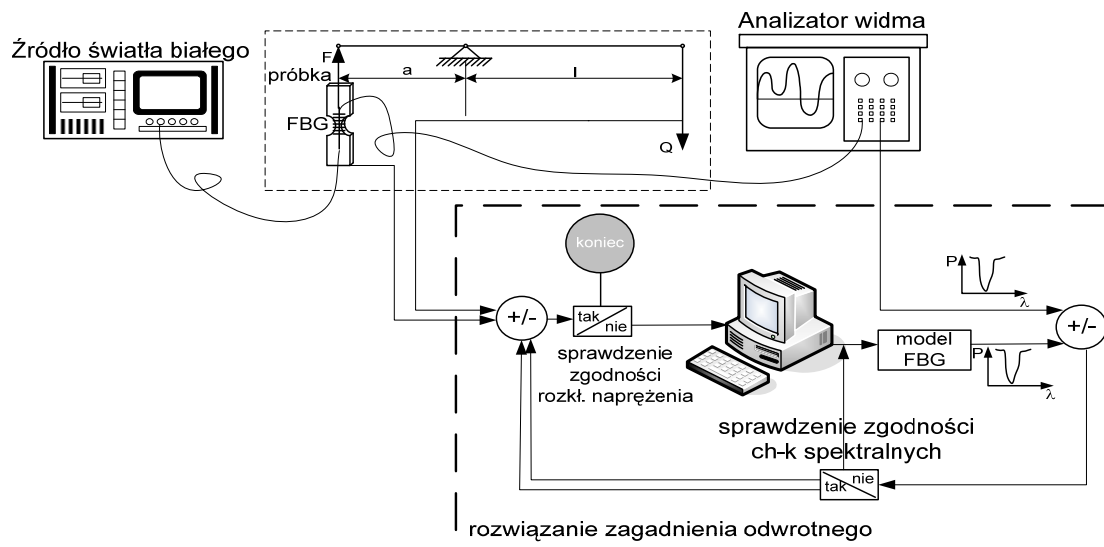
gdzie:  $x'$  jest punktem kolokacji, dla którego układane jest równanie całkowe,  $x$  jest punktem brzegowym, a  $X$  punktem należącym do obszaru ciała,  $c_{ij}$  jest

stałą zależną od położenia punktu  $x'$ ,  $U_{ij}$  i  $T_{ij}$  są rozwiązaniami fundamentalnymi Kelvina. W równaniach stosowana jest konwencja sumacyjna, a indeksy dla zagadnienia dwuwymiarowego przyjmują wartości  $i, j = 1, 2$ .

Wyznaczenie wartości funkcji pola za pomocą MEB składa się z następujących etapów [20]:

- określenia równania całkowego opisującego rozpatrywany problem,
- dyskretyzacji brzegu obszaru i równania całkowego,
- wyznaczenia wartości funkcji pola i jej pochodnej normalnej na brzegu,
- przeprowadzenia dodatkowych obliczeń (np. wyznaczenie wartości funkcji pola we wnętrzu obszaru, wyznaczenie parametrów całkowych).

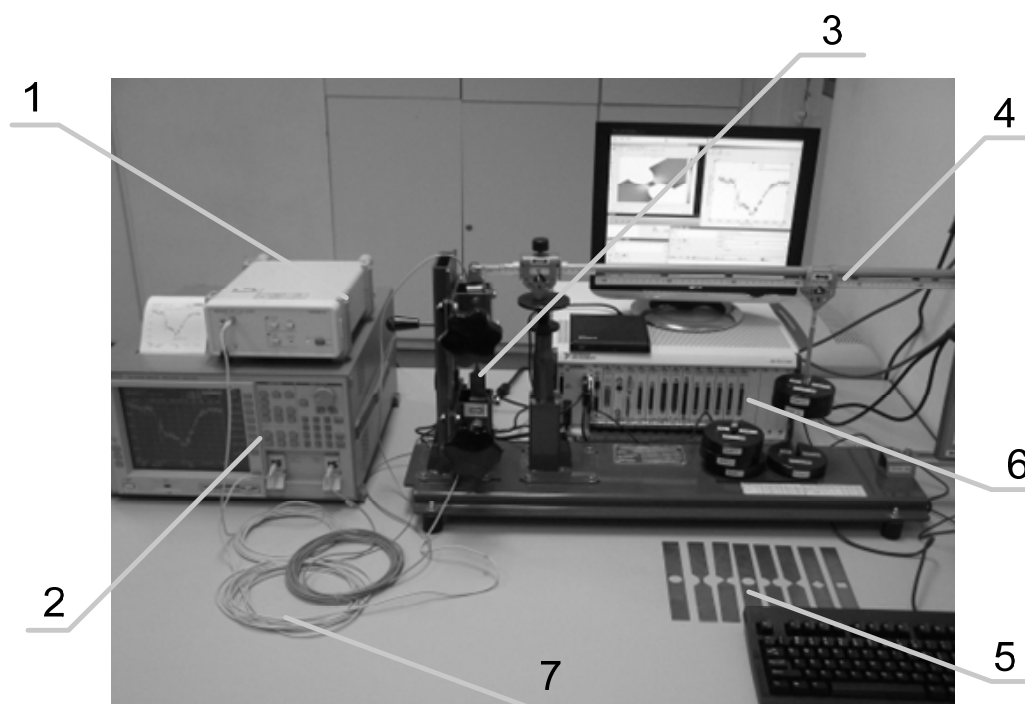
Badania wykonane zostały na zbudowanym stanowisku laboratoryjnym, którego schemat przedstawia rysunku 1.



Rys. 1. Schemat blokowy stanowiska laboratoryjnego do wyznaczania rozkładu wydłużenia przy wykorzystaniu światłowodowych siatek Bragga

Światło o długościach fali od 400-1700 nm (źródło światła białego YOKOGAWA AQ-4305) kierowane jest do włókna światłowodowego, na którym zapisana jest siatka Bragga (FBG). Siatka naklejona została na próbkę, na którą działa siła rozciągająca  $F$  przy wykorzystaniu stanowiska laboratoryjnego do wytwarzania naprężeń. Światło (jego zmodyfikowane widmo) po przejściu przez wydłużoną siatkę jest kierowane do analizatora widma optycznego (ANDO AQ-6315B). W tym samym czasie losowo wygenerowany zostaje rozkład wydłużenia za pomocą algorytmu symulowanego wyżarzania. Ten przypadkowy rozkład zosta-

je następnie wprowadzony do modelu siatki Bragga. Za pomocą modelu na podstawie przypadkowego rozkładu wydłużenia, obliczone zostaje widmo transmisyjne siatki. Widmo zamodelowane i widmo rzeczywiste (z analizatora widma) zostają następnie porównane i obliczona zostaje wartość funkcji celu. W przypadku braku zgodności charakterystyk spektralnych dobierane są nowe wartości rozkładu wydłużenia siatki (zgodnie z algorytmem symulowanego wyżarzania). Są one ponownie wykorzystane do obliczenia nowego widma transmisyjnego za pomocą modelu, które jest porównywane z widmem zmierzonym i cały proces powtarza się aż do uzyskania założonej dokładności, czyli do uzyskania określonej (odpowiednio małej) wartości funkcji celu. Rozkład wydłużenia, który doprowadzi do minimalizacji funkcji celu, będzie rozkładem wynikowym, najbardziej dopasowanym do rzeczywistego. Kolejnym krokiem jest sprawdzenie zgodności rozkładu wyznaczonego za pomocą algorytmu z rozkładem teoretycznym, wynikającym z siły rozciągającej  $F$  oraz kształtu próbki rozciąganej. Znajomość siły  $F$  oraz kształtu próbki pozwala na obliczenie (za pomocą metody MES i MEB) teoretycznego rozkładu wydłużenia próbki i siatki. Na rysunku 2 przedstawiono zdjęcie stanowiska pomiarowego.

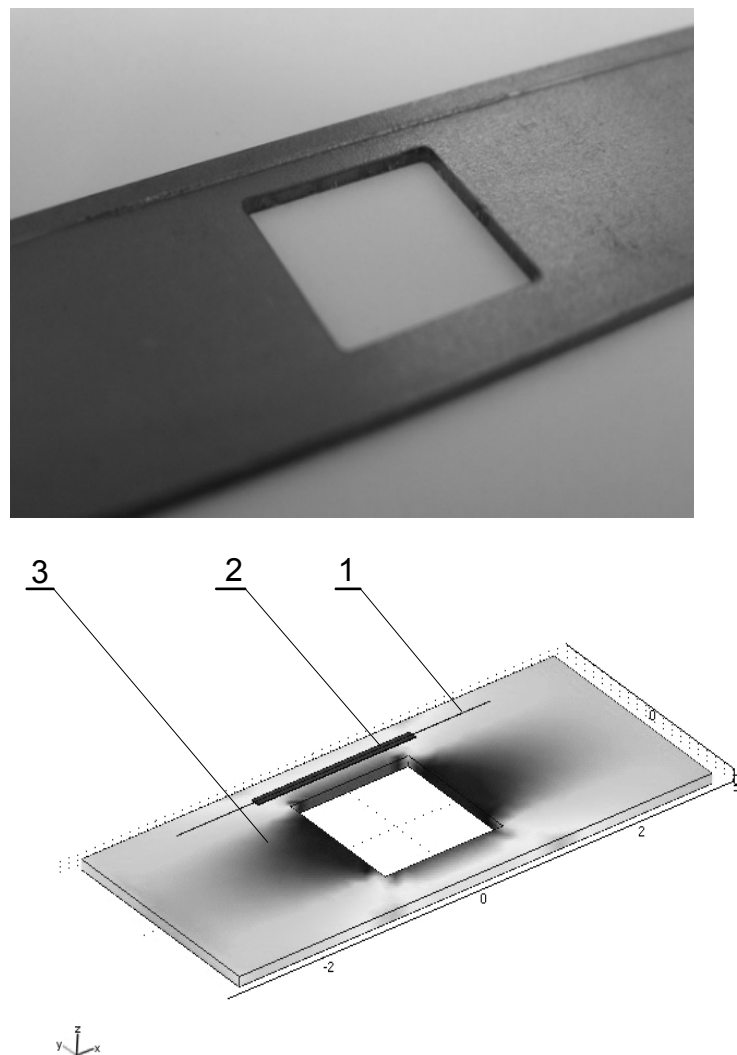


**Rys. 2. Stanowisko pomiarowe:**

1 – źródło światła białego, 2 – analizator widma, 3 – siatka Bragga, 4 – stanowisko laboratoryjne do wytwarzania naprężeń, 5 – kształty rozciąganych próbek, 6 – urządzenie rejestracji danych pomiarowych i przeprowadzania obliczeń numerycznych, 7 – jednomodowe włókno światłowodowe, na którym zapisana jest siatka Bragga

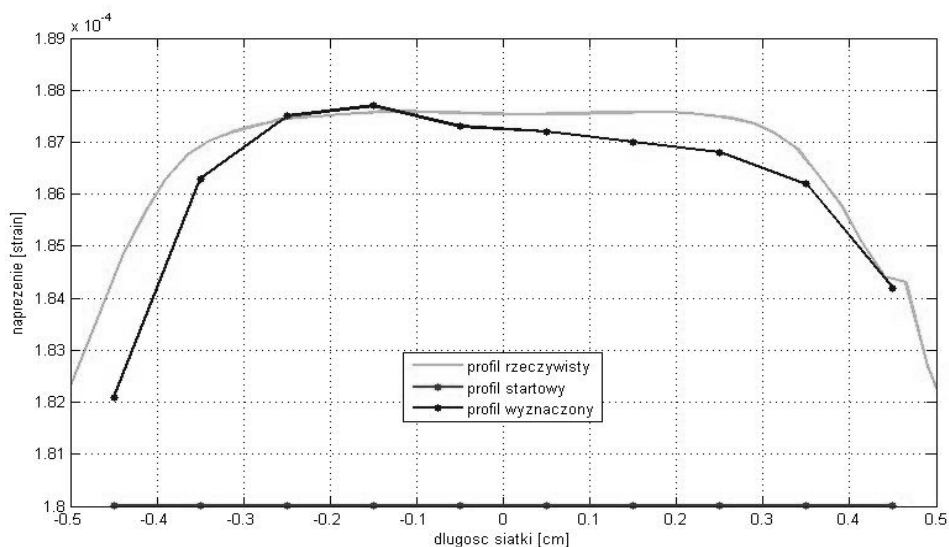
### 3. PORÓWNANIE WYNIKÓW BADAŃ Z WYNIKAMI ANALIZY ODWROTNEJ

Na rysunku 3 przedstawiony został kształt wykorzystanej próbki, zaś na rysunku 4 rozkład wydłużeń tej próbki w funkcji naprężenia dla przypadków teoretycznego (obliczonego na podstawie znajomości obciążenia, geometrii próbek oraz rodzaju materiału MES) i symulowanego (wyznaczonego z pomiarów pośrednich na stanowisku laboratoryjnym). Natomiast na rysunku 5 został przedstawiony rozkład wydłużeń dla tej samej próbki w funkcji naprężenia dla obliczeń za pomocą metody elementów brzegowych.



**Rys. 3. Badany układ:**

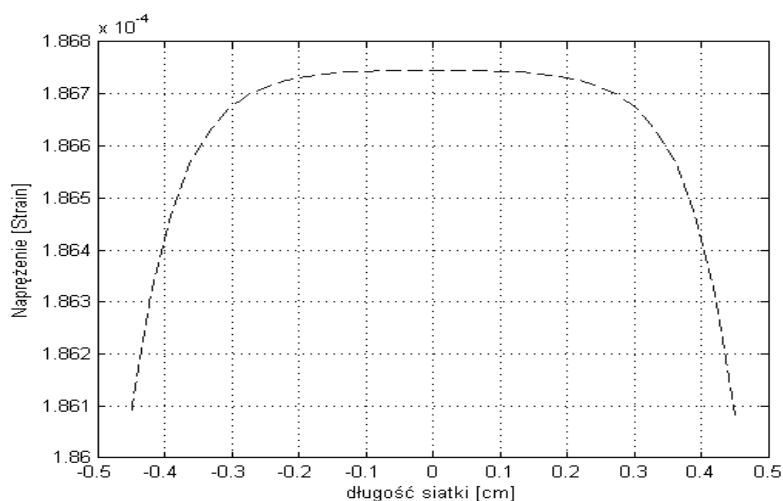
1 – włókno światłowodowe z siatką Bragga, 2 – klej, 3 – próbka numer 2



**Rys. 4. Rozkłady wydłużenia w siatce:**

rzeczywisty, początkowy (linia na dole) oraz wyznaczony przy wykorzystaniu metody symulowanego wyżarzania

Na rysunku 4 wykreślone zostały charakterystyki rozkładu wartości wydłużenia w siatce Bragga. Terminem profil rzeczywisty nazwano został wydłużenie, który obliczony był przy wykorzystaniu metody elementów skończonych (znana siła rozciągająca próbkę i geometria próbki były wielkościami wejściowymi). Termin profil wyznaczony przyporządkowany został charakterystyce wyznaczonej przy wykorzystaniu widma siatki Bragga, jej modelu i algorytmu symulowanego wyżarzania (algorytm nie zna wielkości siły oraz geometrii próbki, na której umieszczona była siatka Bragga). Proces wyznaczania rozkładu wydłużeń siatki Bragga rozpoczął się od losowo wybranej wartości początkowej naprężenia, stałej na całej długości próbki, nazwanej na rysunku 4 jako profil startowy.



**Rys. 5. Rozkłady wydłużenia w siatce obliczony Metodą Elementów Brzegowych**

Miarą zgodności rozkładu teoretycznego i wyznaczonego za pomocą algorytmu symulowanego wyżarzania jest wartość błędu średniokwadratowego  $\delta$  4:

$$\delta = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\varepsilon_i^{MES} - \varepsilon_i^{alg})^2} \quad (3)$$

gdzie:  $\varepsilon_i^{MES}$  jest wartością wydłużenia teoretycznego,  $\varepsilon_i^{alg}$  jest wartością wydłużenia wyznaczonego przy użyciu algorytmu symulowanego wyżarzania,  $N$  jest liczbą punktów, w których obliczana jest wartość wydłużenia. Dla potrzeb oceny przyjęto  $N = 10$ .

W przypadku układu z daną próbką przedstawioną na rysunku 3 błąd wyznaczenia rozkładu wydłużenia liczony według wzoru (2) wyniósł  $\delta = 0,009$ .

## 4. WNIOSKI

---

Przedstawione wyniki pomiarów laboratoryjnych i symulacji numerycznych wskazują, że istnieje możliwość zastosowania analizy odwrotnej do wyznaczenia rozkładu wydłużenia przy wykorzystaniu czujników ze światłowodowymi siatkami Bragga.

Istnieje możliwość przeprowadzenia symulacji komputerowych przy zastosowaniu algorytmów numerycznych realizujących obliczenia zgodnie z matematyczną strukturą modelu siatki Bragga i uwzględniających wartości wszystkich parametrów tego modelu.

Wykorzystana w niniejszej pracy metoda elementów brzegowych pozwala na uzyskanie porównywalnych wyników do metody elementów skończonych przy mniejszym nakładzie obliczeniowym.

## LITERATURA

1. J. Mroczka: PROBLEMY METROLOGII ELEKTRONICZNEJ I FOTONICZNEJ, praca zbiorowa pod redakcją Janusza Mroczki, Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 2008, pp. 16-41.
2. R. Dembo, D. Rosen: The practice of portfolio replication. A practical overview of forward and inverse problems, *Annals of Operations Research* 85(1999), pp. 267–284.
3. V. Kreinovich, R. Muhanna: Interval-Related Talks at the International Conference on Finite Element Methods in Engineering and Science, *Reliable Computing* (2007) 13, pp. 375–379.



4. W. Wójcik, Z. Lach, P. Kisała: Wstępna ocena metod wyznaczania rozkładu naprężeń zmierzonego przy użyciu światłowodowej siatki Bragga, *Pomiary Automatyka Kontrola*, Vol. 53, nr 11'2007, s. 15-19.
5. W. Wójcik, P. Kisała, S. Ciężczyk: The conception of the temperature distribution measurement with the use of the Fiber Bragg Gratings, *Przegląd Elektrotechniczny*, R. 84 NR 3/2008.
6. Z. Kaczmarek: Fiber Bragg grating impulsive pressure sensor. *Proc. SPIE, Optical Fibers Applications*, 2005, Vol. 5952, pp. 151-155.
7. Z. Kaczmarek: Światłowodowy czujnik ciśnień impulsowych z siatka Bragga, *Pomiary Automatyka Kontrola*, No. 4, 2006, s. 24-28.
8. T. Guskowski, J. Mroczka: Rozwiązanie problemu odwrotnego w turbidymetrii z wykorzystaniem sieci neuronowej, *Pomiary Automatyka Kontrola* 2007 nr 9bis, s. 239-241.
9. J. Mroczka, D. Szczuczyński: Wpływ modelu rozproszenia światła na jakość rozwiązań zagadnienia odwrotnego w pomiarach nefelometrycznych, *Pomiary Automatyka Kontrola* 2007 nr 9bis, s. 242-245.
10. J. Mroczka, D. Szczuczyński: Problem odwrotny – jakość rekonstrukcji funkcji rozkładu wielkości cząstek w pomiarach nefelometrycznych i turbidymetrycznych, *Pomiary Automatyka Kontrola* 2007 nr 9bis, s. 246-249.
11. A. Polak, J. Mroczka: "Regularyzacja identyfikacji obiektów złożonych opisanych modelami nieliniowymi", *Pomiary Automatyka Kontrola* 2007 nr 9bis, s. 190-193.
12. M. Czerwiński, J. Mroczka, T. Girasole, G. Gouesbet, G. Grehen: Light-transmittance predictions under multiple-light-scattering conditions. II. Inverse problem: particle size determination, *Applied Optics* VOL. 40 ; ISSUE: 9; (c) 2001 Optical Society of America, pp.1525-1531.
13. J. Mroczka, Adam G. Polak: Selection of identifiable parameters from the reduced model for forced expiration, *World Congress on Medical Physics and Biomedical Engineering* 2006, Vol. 14, pp. 764-768.
14. A. Polak, J. Mroczka: A metrological model for maximum expiration, *Measurement* 23 (1998) pp. 265–270.
15. A. Sikora, Z. Kaczmarek: Analiza pracy światłowodowej siatki bragga o stałym okresie przy odkształceniach impulsowych, *Pomiary Automatyka Kontrola* (53), nr 9bis/2007, s. 309-312, 2007.
16. A. Sikora, Z. Kaczmarek: Praca wybranych rodzajów światłowodowych siatek Bragga jako przetworników odkształceń impulsowych, *Pomiary Automatyka Kontrola* 4, s. 29-31, 2006.
17. I. Jabłoński, J. Mroczka: Frequency-domain identification of the respiratory system model during the interrupter experiment, *Measurement* 2009, Vol. 42 Issue 3, pp. 390-398, 9p.
18. W. Wójcik, P. Kisała, S. Ciężczyk: Czujnik rozkładu naprężenia ze światłowodową siatką Bragga, *Pomiary Automatyka Kontrola*, Vol. 53, nr 11'2007, s. 6-9.
19. J. Sikora: *Boundary Element Method for Impedance and Optical Tomography*, Oficyna wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 2007.
20. P. Jabłoński: *Metoda elementów brzegowych w analizie pola elektromagnetycznego*, Wydawnictwo Politechniki Częstochowskiej, Częstochowa 2003.
21. P. Fedeliński: *Metoda elementów brzegowych w analizie układów sprężystych ze sztywnymi włóknami*, *Modelowanie Inżynierskie* 32 s.135-142, Gliwice 2006
22. A.A. Becker: *The boundary element method in engineering. A complete course*. McGraw-Hill Book Company, London 1992.

DETERMINE INTENSITY OF STRESS  
BY FINITE ELEMENT METHOD  
AND BOUNDARY ELEMENT METHOD

Waldemar WÓJCIK, Piotr KISAŁA,  
Krzysztof KRÓL

**ABSTRACT** *In this article show inverse problem to determine intensity of stress We use the fiber Bragg gratings as a strain sensor, and we have carried out distributed strain measurements by using of optimization algorithms. Numerical methods for resolve the inverse problem are necessary to recover the strain distribution, which was measured by using of FBG element*