

Michał BORYSIAK
Zuzanna KRAWCZYK

POPRAWA JAKOŚCI TRÓJWYMIAROWYCH SIATEK CZWOROŚCIENNYCH UŻYWANYCH DO ANALIZY METODĄ ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH PRZY UŻYCIU PROGRAMU STELLAR

STRESZCZENIE

W niniejszej publikacji przedstawiamy opis zastosowania i ocenę użyteczności programu Stellar do poprawy jakości trójwymiarowych siatek czworościennych tak, aby były one użyteczne do obliczeń przeprowadzanych metodą elementów skończonych. Powodem zainteresowania tematem poprawy jakości jest tworzone przez nas oprogramowanie dostosowujące trójwymiarowe modele fragmentów ciała do wymiarów konkretnego pacjenta, co najczęściej powoduje pogorszenie jakości siatek wynikowych, a w efekcie zmniejszenie ich przydatności pod kątem zastosowań w obliczeniach. Publikacja przedstawia krótki opis miar jakości użytych w programie Stellar oraz przykład poprawy jakości siatki zdeformowanej w wyniku operacji morfingu.

Słowa kluczowe: siatka czworościenna, MES, morfing siatek trójwymiarowych, Stellar.

Michał BORYSIAK

e-mail:borysiam@ee.pw.edu.pl

Zuzanna KRAWCZYK

e-mail:krawczyk@ee.pw.edu.pl

1. WSTĘP

Współczesne metody terapii, przy pomocy pola elektromagnetycznego często wymagają symulacji rozkładów pól przy użyciu trójwymiarowych modeli ciała ludzkiego, bądź jego fragmentów. W tym celu wykorzystuje się metodę elementów skończonych, zastosowaną do trójwymiarowej siatki czworościennej opisującej badany organ. Sukces takiej symulacji zależy w dużej mierze od jakości elementów siatki wejściowej oraz od dokładności z jaką model przedstawia rzeczywisty obiekt.

Stworzenie modelu opisującego badany organ z zadowalającą dokładnością jest z reguły operacją niezwykle czasochłonną i nie dającą się zautomatyzować, co zmniejsza praktyczną użyteczność tej metody. W pracach [1, 5] zaproponowano sposób rozwiązania powyższej trudności, poprzez skorzystanie z predefiniowanej standardowej siatki reprezentującej dany fragment ciała i jej przekształcanie, z wykorzystaniem odpowiedniego algorytmu morfingu tak, aby odwzorowywała kształt części ciała konkretnego pacjenta. W przyszłości podstawą metody winna stać się biblioteka standardowych trójwymiarowych modeli reprezentujących różne typy budowy ciała lub jego fragmentów.

Trzeba jednak mieć na uwadze, że tak wprowadzona operacja przekształcania siatki powoduje pogorszenie jej jakości względem metody elementów skończonych: znaczące odstępstwa elementów siatki od kształtu czworościanu foremego prowadzą do pojawienia się błędów w obliczeniach – zbyt małe kąty dwuścienne powodują złe uwarunkowanie macierzy sztywności, natomiast zbyt duże – zwiększają błąd interpolacji. W ramach zaproponowanej metody musi więc funkcjonować również mechanizm poprawy jakości przekształconych siatek standardowych. W niniejszej pracy zbadaliśmy przydatność zastosowania programu Stellar [2, 3] do poprawy jakości siatek przekształconych algorytmem morfingu.

2. POPRAWA JAKOŚCI SIATKI PRZY UŻYCIU PROGRAMU STELLAR

Stellar jest programem stworzonym przez Brayana Matthew Klingnera oraz Jonathana Richarda Shewchuka z Department of Electrical Engineering and Computer Sciences University of California Berkeley, udostępnianym na licencji BSD. Został napisany w standardzie ANSI C, z użyciem standardowych

bibliotek tego języka, co oznacza, że może być uruchomiony na wszystkich platformach udostępniających kompilator języka ANSI C. Stellar rozprowadzany jest razem z programem Showme służącym do wizualizacji siatek [4].

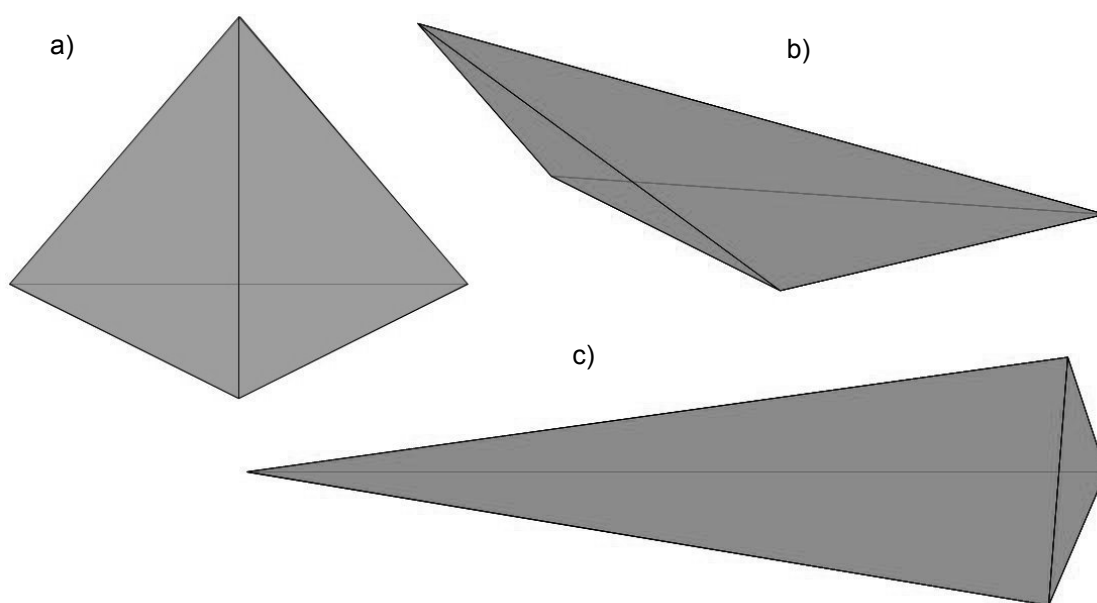
2.1. Miary jakości zastosowane w programie

Według autorów programu Stellar, jakość siatki nie jest zależna jedynie od średniej jakości wszystkich jej elementów, ale w dużej mierze od jakości najgorszych elementów siatki (posiadających zbyt duże lub zbyt małe kąty dwuścienne). Algorytm poprawy siatki w programie Stellar stara się więc poprawić ją tak, aby najgorszy jej element posiadał możliwie najwyższą jakość. Stellar definiuje miarę jakości czworościanu t , jako liczbę $q(t)$ przybliżającą dobry bądź zły wpływ jakości czworościanu na błąd interpolacji i uwarunkowanie macierzy sztywności, taki, że $q(t)$ jest funkcją rosnącą jakości czworościanu, a jej maksymalna wartość, którą przyjmuje dla czworościanu foremego, wynosi 1. Wartość zero oznacza czworościan maksymalnie zniekształcony, w którym wszystkie wierzchołki leżą w jednej płaszczyźnie, a wartości ujemne wskazują na nieprawidłową orientację wierzchołków bryły, która nie jest obsługiwana przez program. Stellar implementuje 4 miary jakości [2, 3]:

- *minimal sine* – najmniejsza wartość sinusa każdego z 6 kątów dwuściennych danego czworościanu;
- *biased minimal sine* – najmniejsza wartość sinusa każdego z 6 kątów dwuściennych danego czworościanu, z tym, że przed wyborem minimum sinusy kątów rozwartych mnożone są przez określony współczynnik (domyślnie 0,75);
- *radius ratio* – stosunek promienia sfery wpisanej w czworościan do promienia sfery opisanej na danym czworościanie znormalizowany tak, aby najwyższa wartość wynosiła 1;
- *volume-length ratio* – iloraz objętości czworościanu i sześcianu pierwiastka kwadratowego z sumy kwadratów długości jego boków, znormalizowany tak, aby osiągał najwyższą wartość równą 1 dla czworościanu foremego.

Dwie pierwsze miary jakości (*minimum sine* i *biased minimum sine*) nie postrzegają, jako złych, bardzo długich i wysokich czworościanów (*spire tetrahedra*), gdyż swoją wartość opierają jedynie na kątach dwuściennych, które w tym przypadku mogą mieć dobre wartości. W przeciwieństwie do nich miary *volume-length* oraz *radius ratio* wychwytyją niekorzystne proporcje w długościach krawędzi takich czworościanów i traktują je jako gorsze. Bardzo wydłużone czworościany nie zwiększają błędów dyskretyzacji, ani nie pogarszają ukondycjo-

nowania macierzy. Jednakże ich obecność może stwarzać problemy, gdyż dokładność obliczeń MES jest odwrotnie proporcjonalna do długości najdłuższej krawędzi danego czworościanu. Jakość całej siatki jest reprezentowana w postaci wektora jakości poszczególnych jej elementów, uporządkowanych w kolejności rosnącej (względem wartości funkcji $q(t)$), przy czym dwa wektory reprezentujące jakość siatki przed i po podjęciu próby naprawy jej jakości są porównywane w porządku leksykograficznym, co zapewnia, że najgorsze elementy w siatce będą miały wyższą wagę niż elementy jakościowo lepsze [2].



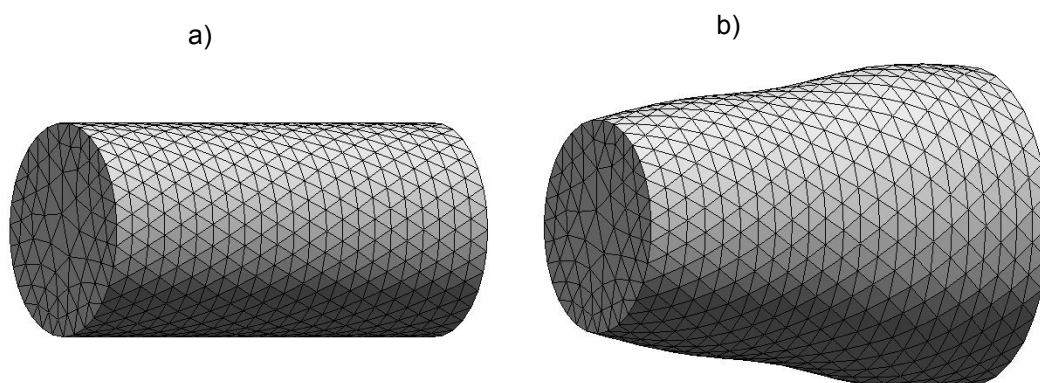
Rys. 1. Przykłady czworościanów o dobrych i złych kształtach:

a) czworościan zbliżony kształtem do foremnego, b) czworościan zdeformowany, c) *spire tetrahedron*

2.2. Degradacja jakości siatki na skutek morfiningu

Jednym z zasadniczych elementów praktycznej aplikacji metod rozwiniętych w pracach [1, 5] jest efektywny i łatwy w użyciu morfer. Obecnie pracujemy nad oprogramowaniem do przekształcania siatek, w którym użytkownik ma możliwość rozciągnięcia lub zwężenia modelowanej bryły oraz zmiany jej grubości w poszczególnych punktach pomiarowych, dostosowując model do wymiarów zdjętych z ciała pacjenta. Na podstawie minimalnej liczby pomiarów pobranych z ciała pacjenta interpolowane są punkty tworzące siatkę powierzchniową bryły docelowej – wyobrażającej fragment ciała pacjenta. Następnie tworzony jest zbiór wektorów rozpiętych na punktach stworzonej siatki docelowej oraz na odpowia-

dających im punktach utworzonych na powierzchni bryły modelowej. Kolejnym krokiem jest właściwy morfing polegający na przesunięciu każdego z węzłów siatki o sumę ważoną trzech sąsiednich wektorów. Algorytm zmieniając położenie węzłów nie uwzględnia w żaden sposób połączeń między nimi, przez co krawędzie czworoscianów ulegają skróceniu bądź wydłużeniu. W rezultacie elementy siatki ulegają deformacji co wyraża się w nieprawidłowych wartościach kątów dwusiecznych w poszczególnych czworoscianach powodując degradację jakości siatki.



Rys. 2. Siatka modelowa:
a) przed operacją morfingu, b) po operacji morfingu

2.3. Analiza poprawy jakości przykładowej siatki

Dla zilustrowania problemów pojawiających się w prezentowanej metodzie posłużyliśmy się prostym modelem o kształcie cylindrycznym, który pozwala zbadać działanie algorytmu oraz programu poprawiającego jakość dla siatek przedstawiających fragmenty kończyn takich jak ramię, przedramię, udo czy też goleń. Na skutek przekształceń dokonywanych przez program morfujący, jakość siatki została pogorszona tak, że najmniejszy jej kąt wynosił $11,857^\circ$, a największy: $155,42^\circ$, podczas gdy wartości kątów dwusiecznych siatki wejściowej wahały się w przedziale od $25,793^\circ$ do $140,43^\circ$.

Siatkę poddaliśmy próbie naprawy przy pomocy programu Stellar. Do poprawy modelu zastosowaliśmy cztery zaimplementowane w programie miary jakości. Miarą, dla której poprawa jakości okazała się najefektywniejsza była *biased minimum sine*, pozwalająca uzyskać najmniejszy kąt dwusieczny równy $38,838^\circ$, oraz największy: $122,95^\circ$, czyli wartości lepsze niż w przypadku cylindrycznej siatki wejściowej. Dość dobre efekty dała polecana przez autorów prog-

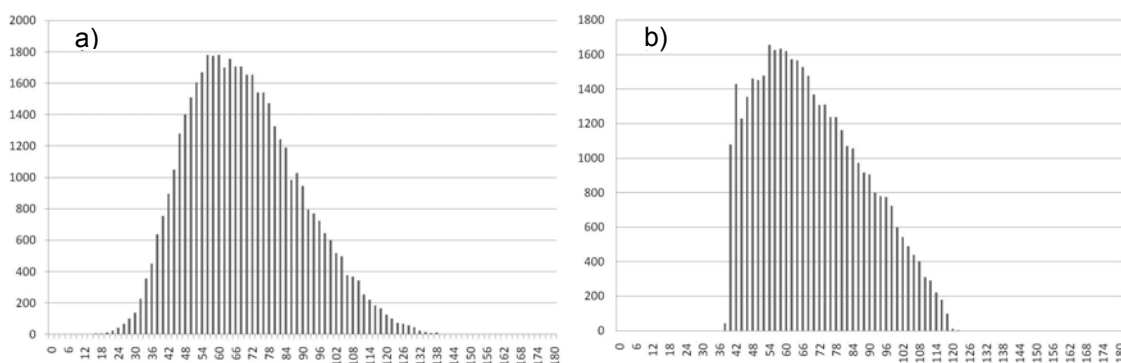
ramu miara *volume-length ratio* poprawiając lepiej maksymalny kąt ($120,04^\circ$), kąt minimalny ($33,454^\circ$) uzyskała jednak nieco gorszy niż miara *biased minimum sine*. Próbując uzyskać dalszą poprawę parametrów siatki zmodyfikowaliśmy współczynnik, przez który mnożone są wartości kątów rozwartych w mierze *biased minimum sine* z domyślnego 0,75 na 0,7. Nie spowodowało to zawężenia, a jedynie przesunięcie zakresu kątów w siatce ($36,999^\circ - 121,74^\circ$). W wypadku zastosowania współczynnika 0.8 program zakończył swoje działanie przed czasem wypisując komunikat o błędzie, nie poprawiając siatki. Lepszych efektów nie przyniosło również zastosowanie pod rząd dwóch najlepszych miar jakości czyli najpierw miary *biased minimum sine*, a następnie do uzyskanej w ten sposób siatki wynikowej miary *volume-length ratio* ($30,714^\circ - 120,43^\circ$).

TABELA 1

Porównanie wartości kątów dwuściennych minimalnych oraz maksymalnych uzyskanych poprzez poprawę siatki z użyciem poszczególnych miar jakości

Miara jakości	Najmniejszy kąt [°]	Największy kąt [°]
Siatka zdegradowana	11,857	155,42
biased minimum sine	38,838	122,95
minimum sine	38,461	140,42
radius ratio	21,812	130,89
volume length ratio	33,454	120,04

Zastosowanie pozostałych dwóch miar – *minimum sine* oraz *radius ratio* również przyniosło poprawę jakości, zysk jednak był znacznie mniejszy niż w przypadku najbardziej efektywnych miar.

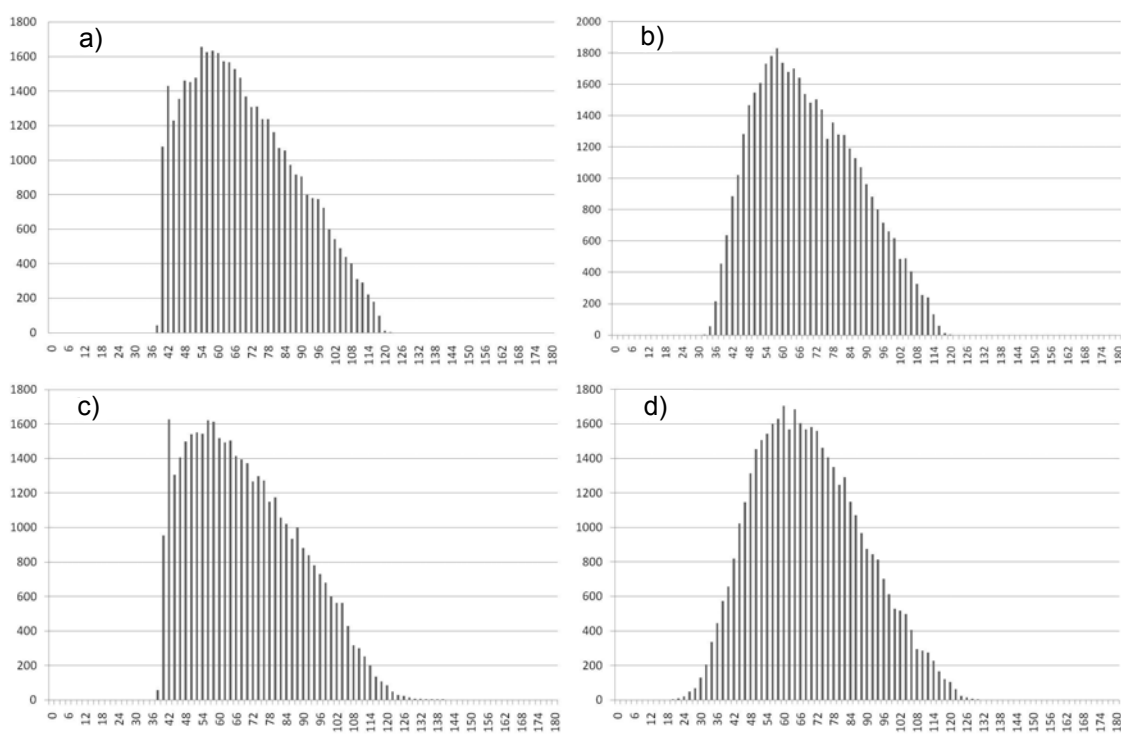


Rys. 3. Rozkład kątów:

a) siatki niepoprawionej, b) siatki poprawionej za pomocą najefektywniejszej z miar – *biased minimum sine*

A priori Stellar może być stosowany również do poprawy siatki wejściowej, przed operacją morfowania. Można oczekiwać, że w takim przypadku pogor-

szczenie jakości w procesie morfowania nie będzie tak głębokie jak w przypadku czystej siatki wejściowej, zaś ponowne zastosowanie programu doprowadzi do lepszego wyniku końcowego. Dokonane próby nie potwierdzają jednak tej tezy, prowadząc jedynie do przesunięcia zakresu kątów dwuosiennych zmorfowanej siatki, bez jego zawężenia. Tym niemniej nie można wykluczyć, że w przypadku bardziej skomplikowanych struktur opisana podwójna poprawa jakości może przynieść lepszy rezultat. Niewątpliwą korzyścią takiej procedury, nawet w odniesieniu do siatek cylindrycznych, jest skrócenie czasu działania programu Stellar w stosunku do siatki zmorfowanej. Związane jest to z tym, że Stellar jest w ogólności szybszy w przypadku zastosowania go do siatek o wyższej jakości.



Rys. 4. Rozkład kątów uzyskanych za pomocą wszystkich miar:
 a) *biased minimum sine*, b) *volume-length ratio*, c) *minimum sine*, d) *radius ratio*

2.4. Ocena skuteczności poszczególnych opcji poprawy siatki

Program implementuje szeroki wachlarz operacji mających na celu poprawę jakości siatki. Autorzy programu Stellar podzielili je na trzy kategorie:

- wygładzanie wierzchołków (*smoothing*),
- operacje topologiczne zachowujące liczbę wierzchołków w poprawianej siatce,

- operacje topologiczne zmieniające liczbę wierzchołków w poprawianej siatce – skracanie krawędzi (*edge contraction*) oraz wstawianie wierzchołków (*vertex insertion*).

Operacje topologiczne ingerują w strukturę połączeń, mogą również zmieniać liczbę wierzchołków oraz czworościanów w siatce. Polegają na usunięciu niektórych powiązanych ze sobą elementów (np. dzielących wspólną krawędź) i zastąpieniu ich pewną liczbą nowych elementów zajmujących dokładnie tyle samo miejsca co obiekty usunięte. Wśród nich można wyróżnić operacje zamiany czworościanów takie jak *flip 2-3* oraz *flip 3-2*. Pierwsza z nich wstawia w miejsce dwóch czworościanów dzielących wspólną płaszczyznę trzy czworościany połączone wspólną krawędzią, podczas gdy druga wykonuje operację odwrotną. W programie zaimplementowano również usuwanie ścian (*multi-face removal*) oraz krawędzi (*edge removal*) uogólniające operacje *flip 2-3* i *flip 3-2* do większego zbioru elementów. Operacja *flip 2-2* jest natomiast szczególnym przypadkiem zamiany wykonywanym na dwóch przyległych czworościanach, która w wyniku daje taką samą liczbę elementów – w tym wypadku usuwana jest zarówno wspólna ściana jak należące do niej krawędzie.

Operacje wygładzania wierzchołków (*vertex smoothing*) opierają się na przesuwaniu węzłów siatki bez zmiany połączeń między nimi – nie dodają zatem żadnych nowych elementów ani ich nie usuwają. Autorzy programu zaimplementowali algorytm optymalizacji numerycznej, w którym maksymalizowaną funkcją celu jest jakość najgorszego czworościanu w grupie elementów dzielących wspólny wierzchołek. Algorytm najpierw wyznacza kierunek przesunięcia wierzchołka, opierając się na wypadkowej gradientów funkcji celu, obliczonych dla jego różnych pozycji, a następnie odległość o którą ma go przesunąć wzdłuż wyznaczonego kierunku, aby zajął optymalną pozycję. Stellar umożliwia również przesuwanie wierzchołków znajdujących się na powierzchni siatki, na dwa sposoby – pierwszy bez zmiany kształtu powierzchni (wygładzane są tylko wierzchołki leżące na płaszczyźnie utworzonej przez ściany przyległych do siebie czworościanów w obszarze tej płaszczyzny lub wierzchołki znajdujące się na krawędzi dwóch płaszczyzn wzdłuż tej krawędzi) oraz drugi (*quadric smoothing*) dopuszczający niewielką zmianę kształtu powierzchni (dopuszcza także przesuwanie wierzchołków leżących na styku minimum trzech ścian, które nie są współpłaszczyznowe). *Quadric smoothing* pozwala kontrolować maksymalne dopuszczalne odstępstwo kształtu poprawianej powierzchni od powierzchni pierwotnej – poprawa modelu z uwzględnieniem tej opcji pozwoliła uzyskać wynik zbliżony do uzyskanego przez nas wyniku optymalnego, według autorów programu pozwala ona jednak w niektórych wypadkach znacznie poprawić jakość siatki.

Operacja skracania krawędzi (*edge contraction*) należy do operacji topologicznych zmieniających liczbę węzłów w siatce. Polega na usunięciu krawędzi

wraz z współdzielącymi ją czworościanami i zastąpieniu dwóch ograniczających ją wierzchołków jednym, przy czym nowy węzeł jest wstawiany w miejsce jednego z oryginalnych zakończeń. W implementacji programu Stellar operacja obcinania krawędzi może dać w wyniku zdegenerowany lub odwrócony czworościan. Zarówno w takim przypadku, jak i wtedy, gdy operacja nie przyniesie poprawy jakości siatki, wszystkie poczynione zmiany są cofane.

Wstawianie wierzchołków (*vertex insertion*) zaimplementowane w programie stawia sobie za cel poprawę szczególnie zdegradowanych czworościanów. Jako, że operacja ta była dotychczas niedoceniana w procesie poprawy jakości siatek, autorzy zaimplementowali własny algorytm wstawiania. Polega on na wybraniu czworościanu i wstawieniu wierzchołka do jego wnętrza. Następnie usuwane są wszystkie elementy znajdujące się w pobliżu wstawionego wierzchołka, po czym powstały w ten sposób pusty obszar jest poddawany na nowo triangulacji, a następnie poprawie z użyciem operacji topologicznych oraz *smoothingu*. W przypadku, gdy jakość siatki nie ulegnie poprawie, wszystkie poczynione podczas wstawiania zmiany są cofane [2].

Stellar pozwala użytkownikom na wybór i skonfigurowanie poszczególnych opcji poprawy siatki, jak również na wybór metod ich poprawy. Zgodnie z zaleceniami autorów najlepsze efekty uzyskuje się przy użyciu jak największej liczby metod poprawy siatki naraz (tzn. przy włączonych operacjach *smoothingu* i topologicznych oraz insercji wierzchołków). Istotnie zastosowanie takiego podejścia przyniosło również najlepsze efekty w odniesieniu do omawianego przez nas modelu. Zbadaliśmy, które z operacji mają największy udział w poprawie siatki poprawiając ją kolejno z wykorzystaniem jedynie części operacji, przy mierze jakości *biased minimum sine*.

Omawiany przez nas model został najsukuteczniej poprawiony poprzez operacje *smoothingu* – poprawa siatki z ustawioną wyłącznie tą opcją pozwoliła na uzyskanie najmniejszego kąta o wartości $27,698^\circ$, a największego $138,81^\circ$. Zastosowanie jedynie operacji insercji wierzchołków spowodowało poprawę siatki do kątów z przedziału $24,344^\circ - 146,09^\circ$. Najślabiej poprawiającymi siatkę operacjami okazały się operacje topologiczne (uzyskano kąty w przedziale $17,502^\circ - 147,83^\circ$). Warto nadmienić, że poszczególne opcje poprawy siatki można uszczegółowić co pozwala na lepsze dopasowanie schematu poprawy siatki do preferencji użytkownika.

3. PODSUMOWANIE

Podczas pracy z programem napotkaliśmy pewne trudności. W założeniu pracuje on jedynie na takich siatkach, w których elementy mają prawoskrętną

orientację wierzchołków. W innym wypadku program wskazuje tylko, które z czworościanów mają nieprawidłową (ujemną) orientację a następnie kończy działanie. Stellar zawodzi również podczas próby poprawy jakości siatek posiadających ekstremalnie zniekształcone czworościany (np. takie, których stosunek objętości do pola powierzchni jest bliski zeru). Należy jednak zwrócić uwagę na fakt, że siatki takie zostały stworzone jedynie w celach eksperymentalnych i stanowią niewielką część poprawianych struktur. Z drugiej strony otwarty kod oraz darmowa dystrybucja programu stanowią jego silny atut. Możemy stwierdzić, że Stellar w większości przypadków, pozwala na efektywne poprawianie jakości trójwymiarowych siatek czworościennych znacząco optymalizując je pod kątem wykorzystania do obliczeń przeprowadzanych metodą elementów skończonych.

3.1. Perspektywy wykorzystania programu Stellar

Stellar może okazać się przydatny do poprawy siatek zdegradowanych na skutek operacji morfingu, należałoby go jednak dostosować do realiów realizowanego przez nas projektu. Jednym z kierunków mogłoby być napisanie skryptu umożliwiającego automatyczne uruchomienie poprawy modelu po wygenerowaniu siatki przez morfer z dobranymi uprzednio odpowiednimi parametrami poprawy lub też skryptu, który wykonywałby kilka schematów poprawy siatki, a następnie wybierał optymalnie poprawioną siatkę według określonych przez nas kryteriów. Należałoby również rozważyć zrównoleglenie programu Stellar. – Tworzone przez nas oprogramowanie ma za zadanie utworzenie w możliwie szybki sposób docelowego modelu, w programie Stellar położono zaś nacisk na jak najdokładniejszą poprawę siatki, prędkość jej poprawy jest natomiast kwestią drugorzędną. Poprawa dużych siatek może zajmować zbyt wiele czasu (np. siatkę czworościenną o 29340 wierzchołkach i 166452 czworościanach przedstawiającą głowę ludzką Stellar poprawia przez 15 m 22.926 s na komputerze klasy PC z procesorem Intel(R) Core™2 Duo CPU taktowanym z częstotliwością 2 GHz) – zrównoleglenie programu pomogłoby zoptymalizować czas poprawy siatki. Jest to jednak zadanie o znacznym stopniu komplikacji.

Kolejną kwestią wymagającą rozważenia jest dodanie do programu funkcjonalności umożliwiającej obsługiwanie wielu podobszarów siatki – w przypadku pracy z siatką przedstawiającą element tak złożony jak fragment ciała ludzkiego wyróżnienie kilku podobszarów wydaje się niezbędne, chociażby ze względu na potrzebę różnej gęstości podziału siatki w zależności od reprezentowanej tkanki.

LITERATURA

1. Borysiak M., Krawczyk Z., Starzyński J.: Creating Patient-Specific Finite Element Models with a Simple Mesh Morpher. The 15th Conference "COMPUTER APPLICATIONS IN ELECTRICAL ENGINEERING", Poznań, 2010.
2. Klingner B. M., Ph.D. Dissertation: Improving Tetrahedral Meshes. Department of Electrical Engineering and Computer Sciences, University of California, Berkeley, California, November 2008.
3. Klingner B. M., Shewchuk J. R.: Aggressive Tetrahedral Mesh Improvement. Proceedings of the 16th International Meshing Roundtable, Seattle, Washington, October 2007.
4. Stellar. A Tetrahedral Mesh Improvement Program. <http://www.cs.berkeley.edu/~jrs/stellar/>
5. Szmurło R., Starzyński J., Specimen-specific finite element models of human head obtained with mesh-morphing. Przegląd Elektrotechniczny (Electrical Review), R. 85 NR 3/2009, pp. 47-49.

Rękopis dostarczono dnia 19.10.2010 r.

APPLYING STELLAR FOR 3-D TETRAHEDRAL MESH QUALITY IMPROVEMENT WITH RESPECT TO THE FINITE ELEMENT METHOD

Michał BORYSIK, Zuzanna KRAWCZYK

ABSTRACT *In this paper we present how Stellar can be used to improve the quality of tetrahedral meshes so they can be useful for the effective analysis with the Finite Element Method. We have written a code that adapts a generic tetrahedral mesh representing a model of a given body part to the specific dimension of a given patient. This process may cause the deterioration of the mesh quality. Hence the need for the use of quality improvement procedure.*

We discuss the practical use of Stellar with the realistic example of a mesh in particular the usefulness various quality measures employed by the application.



Michał BORYSIAK – studiuje informatykę na Wydziale Elektrycznym Politechniki Warszawskiej. Jego zainteresowania naukowe skupiają się wokół geometrii obliczeniowej oraz analizy numerycznej.



Zuzanna KRAWCZYK – studiuje informatykę na Wydziale Elektrycznym Politechniki Warszawskiej. Jej zainteresowania naukowe dotyczą przede wszystkim metod numerycznych oraz inżynierii wymagań oprogramowania.